Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas

Matemáticas I (MA1111)
Ene-Mar 2022
Secciones 13, 14 y 15

2$^{\text{do}}$ Examen Parcial (25 %)

Pregunta 1. (5 ptos.) Encuentre el valor de k para el cual el siguiente límite

$$\lim_{x\to 3} \frac{4x^2+kx+7k-6}{2x^2-5x-3}$$

exista y determine, en tal caso, el valor del límite.

Solución: Dado que el denominador de la expresión racional vale cero cuando $x=3$, es necesario que el numerador también valga cero cuando $x=3$ ya que, en caso contrario, el límite no podría tomar algún valor real L. Entonces,

$$\left(4x^2+kx+7k-6\right)\Big|_{x=3} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad k=-3.$$

Luego, reemplazando $k=-3$, el límite vale

$$\lim_{x\to 3} \frac{4x^2-3x-27}{2x^2-5x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(4x+9)}{(x-3)(2x+1)} = \lim_{x\to 3} \frac{4x+9}{2x+1} = 3.$$

Pregunta 2. (6 ptos.) Halle los valores de a y b para los cuales

$$\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{9x^2+ax}-bx\right) = 1/3.$$

Solución: Racionalizando la expresión obtenemos que

$$\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{9x^2+ax}-bx\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{(9-b^2)x^2+ax}{\sqrt{9x^2+ax}+bx}.$$

Si $9-b^2\neq 0$ la expresión del numerador hace que el límite valga infinito y si $b\leq 0$ el límite vale infinito. Entonces,

$$9-b^2=0 \quad \text{y} \quad b>0 \qquad \Longrightarrow \qquad b=3.$$

Luego, reemplazando $b = 3$, el límite es

$$\lim_{x\to\infty} \frac{ax}{\sqrt{9x^2+ax}+3x} = \lim_{x\to\infty} \frac{a}{\sqrt{9+{}^{a}/_{x}}+3} = {}^{a}/_{6}$$

de donde, $a = 2$ para que el límite valga ${}^{1}/_{3}$.

Pregunta 3. (6 ptos.) Calcule $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{1-\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\,{}^{x}/_{a}\right)}{\operatorname{sen}\left(\pi\,{}^{x}/_{a}\right)}$, donde $a \neq 0$.

Solución:

$$\lim_{x\to a} \frac{1-\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\,{}^{x}/_{a}\right)}{\operatorname{sen}\left(\pi\,{}^{x}/_{a}\right)} \overset{\substack{w=\frac{x}{a}-1\\ \downarrow}}{=} \lim_{w\to 0} \frac{1-\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\,w+\frac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{sen}(\pi\,w+\pi)} = \lim_{w\to 0} \frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}\,w\right)}{-\operatorname{sen}(\pi\,w)}$$

$$= \lim_{w\to 0}(-1)\left(\frac{1}{\operatorname{sen}(\pi\,w)}\right)\left(\frac{\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{2}\,w\right)}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}\,w\right)}\right)$$

$$= \lim_{w\to 0} \frac{\pi}{4}\left(\frac{-w}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}\,w\right)}\right)\left(\frac{\pi\,w}{\operatorname{sen}(\pi\,w)}\right)\left(\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\,w\right)}{\frac{\pi}{2}\,w}\right)^2$$

$$= \frac{\pi}{4}\left(\underbrace{\lim_{w\to 0} \frac{-w}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}\,w\right)}}_{=0}\right)\left(\underbrace{\lim_{w\to 0} \frac{\pi\,w}{\operatorname{sen}(\pi\,w)}}_{=1}\right)\left(\underbrace{\lim_{w\to 0} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\,w\right)}{\frac{\pi}{2}\,w}}_{=1}\right)^2 = 0$$

Pregunta 4. (3 ptos.) Calcule $\displaystyle\lim_{x\to -2^+} \frac{mx^2+(2m-3)x-6}{(x+2)^2}$, con $m > 0$.

Solución:

$$\lim_{x\to -2^+} \frac{mx^2+(2m-3)x-6}{(x+2)^2} = \lim_{x\to -2^+} \frac{(x+2)(mx-3)}{(x+2)^2} = \lim_{x\to -2^+} \frac{mx-3}{x+2} = -\infty$$

Ya que $(mx-3) \overset{x\to -2^+}{\longrightarrow} (-2m-3) < 0$, dado que $m > 0$, y $(x+2) \overset{x\to -2^+}{\longrightarrow} 0^+$.

Pregunta 5. (5 ptos.) Demuestre, usando la definición de límite, que

$$\lim_{x\to 1} \frac{\left(1-x^2\right)(3x-2)}{x(1-x)} = 2.$$

Solución:

$$\left|\frac{(1-x^2)(3x-2)}{x(1-x)} - 2\right| = \left|\frac{(x-1)(3x+2)}{x}\right| = 3\left|x + {}^2\!/\!_3\right| \frac{1}{|x|}\,|x-1|$$

Como el dominio de la expresión racional es $\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$ y el límite se está tomando cuando x tiende a 1, para que un conjunto de la forma $(1-\delta,1)\cup(1,1+\delta)$ esté completamente contenido en el dominio de la función es necesario imponer $0<\delta\le 1$. Sin embargo, para acotar el término $\frac{1}{|x|}$ es necesario que $0<\delta<1$.

Entonces, consideremos $D\in(0,1)$ un valor constante cualquiera, e impongamos la restricción: $0<\delta\le D$. Luego,

$$3\left|x+{}^2\!/\!_3\right| \frac{1}{|x|}\,|x-1| < 3\Big(D+{}^5\!/\!_3\Big)\left(\frac{1}{1-D}\right)\delta = \left(\frac{3D+5}{1-D}\right)\delta$$

ya que

- $|x-1|<D \quad \Longrightarrow \quad \left|x+{}^2\!/\!_3\right| < D + \left|1+{}^2\!/\!_3\right| = D+{}^5\!/\!_3$
- $|x-1|<D<1 \quad \Longrightarrow \quad \dfrac{1}{|x|} < \dfrac{1}{1-D}$

Por lo tanto, dado $\epsilon>0$, cualquier valor de δ que cumpla con

$$0<\delta\le \min\left\{ D\,,\ \frac{1-D}{3D+5}\epsilon \right\}$$

para cualquier valor de la constante $D\in(0,1)$, es tal que

$$0<|x-1|<\delta \qquad \Longrightarrow \qquad \left|\frac{(1-x^2)(3x-2)}{x(1-x)} - 2\right| < \epsilon$$

ya que

$$\left(\frac{3D+5}{1-D}\right)\delta \le \left(\frac{3D+5}{1-D}\right)\left(\min\left\{ D\,,\ \frac{1-D}{3D+5}\epsilon \right\}\right) = \min\left\{ \frac{(3D+5)D}{1-D}\,,\ \epsilon \right\} \le \epsilon$$

lo que demuestra que $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\left(1-x^2\right)(3x-2)}{x(1-x)} = 2.$